

УДК 539.3

О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЖЕСТКОГО ИНДЕНТОРА С АРМИРОВАННЫМ РЕЗИНОВЫМ СЛОЕМ С УЧЕТОМ ЯВЛЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

В.В. МОЖАРОВСКИЙ[†]

УО «Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины», кафедра вычислительной математики и программирования, 246019, ул. Советская, 104, г. Гомель, Беларусь.

Рассмотрены аналитические и численные решения задач статического индентирования и описания ползучести, релаксации в покрытиях из композитов. Предложены модели контактного взаимодействия волокнистых материалов, исследован контакт шарового и цилиндрических инденторов с тонким покрытием, лежащем на жестком основании, на основе асимптотических решений теории упругости анизотропного тела получены аналитические зависимости для определения параметров контактного взаимодействия, армированного металлическими волокнами, тонкого резинового слоя с индентором. Проведено экспериментальное исследование контакта жесткого индентора с резиновым слоем, армированным металлическими волокнами.

Ключевые слова: модели контактного взаимодействия, тонкое покрытие из армированной резины, релаксация.

Введение

В настоящее время перспективы прогресса в машиностроении, строительстве в основном связываются с разработкой и широким применением композиционных материалов (композитов). Несмотря на то, что новейшие композиты нашли широкое применение в качестве конструкционных материалов, и были разработаны эффективные инженерные методы оценки расчета этих материалов и конструкций из них при статических нагрузках, но, в тоже время, существует немного сравнимых по эффективности методов расчета поведения элементов конструкций машин из композитов и армированных резин при контактных взаимодействиях (статических и квазистатических) с учетом, например, явлений ползучести и релаксации. Для приближенного расчета ударного и контактного взаимодействия используется квазистатическая теория Герца, базирующаяся на статическом решении контактной задачи взаимодействия упругого индентора (ударника) с анизотропным полупространством. Исследование реакции композитных материалов на удар частицы или внешнего контактного тела с использованием чисто эмпирических или полуэмпирических методов возможно, но затруднительно из-за обширности и дороговизны мероприятий, требуемых при этом для охвата множества разнообразных комбинаций

структур материалов, заполнителей, способов плетения волокна, последовательности укладки слоев, типов конструкций. В настоящее время существует большое количество различных типов графитовых и углеродных волокон. Поэтому выявление типа графитового волокна, обеспечивающего оптимальную реакцию на удар, потребовало бы непомерно больших затрат времени и средств. При определении реакции на удар желательно иметь критерий, позволяющий выяснить, как различные свойства мишени и параметры контакта (удара) влияют на повреждение мишени. В связи с этим возникает необходимость в разработке математических моделей и программ расчета напряжений и деформаций при статическом контакте индентора с армированным (ортоотропным) телом (покрытием) при различных физических свойствах сред (ползучесть, релаксация, пластичность). При этом необходимы как теоретические исследования, так и экспериментальные:

- создание компьютерных программ для реализации аналитических решений и описания ползучести (реологических моделей) при контактом индентировании покрытий из композитов и эластомеров;
- разработать расчетные асимптотические методы и алгоритмы описания индентирования полимеров и покрытий из композитов и резин.

Эта работа является продолжением работ [1–6] в

[†] E-mail: mozh@gsu.by.

области фундаментальных и прикладных исследований по созданию новых армированных материалов с учетом явлений вязкоупругости. В данной работе глубже исследуется контактное взаимодействие армированных материалов, с учетом вязкоупругости резины, армированной кордом, и других композитных материалов. Актуальность исследуемой проблемы в научном и техническом плане очевидна. Обзор исследований в данном направлении показывает, что такие явления, как вязкоупругость матрицы (резины), которая вызывает гистерезисные потери и разрыв материала, в полной мере не учтены, при этом для резины необходимо учитывать влияние фактора времени на механические характеристики материала. В книге [6] предложен подход к расчету контактного взаимодействия вязкоупругих слоистых цилиндрических изотропных тел, дано экспериментальное подтверждение точности разработанной методики. Обзор современных исследований в области контактного взаимодействия в узлах трения из волокнистых композиционных материалов показывает необходимость создания новых математических моделей, учитывающих характер расположения волокон в контактирующих телах и влияние волокон на коэффициент трения, дальнейшей разработки асимптотических методов расчета. Решение плоских контактных задач для анизотропных покрытий представлено, например, в [9]. Численные и аналитические исследования покрытий из трансверсально-изотропных материалов представлены в работе [10], в которой более детально изложены сведения о влиянии различных параметров контактного взаимодействия индентора с покрытием. Существенно углублены исследования в области асимптотических методов расчета слоистых систем, применительно к контактному взаимодействию, в работах [11–13]. В тоже время, является актуальной задачей обеспечения заданных точных решений, путем их реализации в инженерных расчетах, и на ЭВМ.

Аналитические и численные решения задач статического индентирования и описания ползучести (реологических моделей) в покрытиях из композитов.

Некоторые соотношения теории вязкоупругости. Поведение вязкоупругих тел под воздействием силовых полей математически может быть описано с помощью феноменологических теорий, в частности теории вязкоупругости. Для ряда композиционных материалов расчеты параметров деформирования производятся на основе линейной вязкоупругости с ее достаточно полно разработанным математическим аппаратом. Закон деформирования обычно задается реологической моделью в дифференциальной или наиболее общей интегральной форме. Наиболее общей формой выражения связи между напряжениями и деформациями в условиях сложного напряженного состояния в рамках теории линейной вязкоупругости являются интегральные уравнения Больцмана-Вольтерра.

Основные методы решения задач теории вяз-

коупругости известны. Наибольшее распространение получили два метода – метод интегральных преобразований, в соответствии с которым решение вязкоупругой задачи сводится к преобразованию Лапласа основных уравнений теории упругости, решению упругой задачи относительно изображений искомых функций и последующему их обращению; и прямой (или символический) метод Вольтерра, обуславливающий возможность алгебраических действий над интегральными операторами. В дальнейшем будем использовать метод Вольтерра (описание, которого представлено, например, в [14–17]).

Описание временной зависимости деформационных свойств вязкоупругого тела в линейной теории вязкоупругости можно производить по результатам исследования, например, релаксации напряжений, ползучести и др.

Для случая одноосного растяжения–сжатия интегральные уравнения Больцмана-Вольтерра запишутся в виде:

$$\frac{\sigma(t)}{E} = \varepsilon(t) - \int_0^t R(t-s)\varepsilon(s)ds;$$

$$E\varepsilon(t) = \sigma(t) + \int_0^t K(t-s)\sigma(s)ds.$$

Здесь $\sigma(t)$ – напряжение, $\varepsilon(t)$ – деформация; E – модуль упругости; $R(t-s)$, $K(t-s)$ – функция влияния (ядро релаксации, ядро ползучести); t – время наблюдения.

В дальнейшем будем использовать при расчетах слабосингулярное ядро Ржаницына-Колтунова [18] $R(t) = Ae^{-\lambda t}t^{\alpha-1}$ и резольвенту

$$K(t) = t^{-1}e^{-\lambda t} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(A\Gamma(\alpha)t^{\alpha})^i}{\Gamma(i\alpha)} \right],$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция; A , λ , α – реологические параметры.

Техника вычисления интегральных операторов при решении задач теории вязкоупругости с использованием данного ядра представлена в [6]. Введем интегральные операторы \tilde{R} и \tilde{K} :

$$\tilde{R}f(t) = \int_0^t R(t-s)f(s)ds; \quad \tilde{K}f(t) = \int_0^t K(t-s)f(s)ds.$$

Тогда физические уравнения линейной теории вязкоупругости, например, для одноосного растяжения и сжатия, в операторной форме запишем следующим образом:

$$\sigma(t) = \tilde{E}\varepsilon(t); \quad \varepsilon(t) = \tilde{E}^{-1}\sigma(t).$$

Здесь $\tilde{E} = E_0(1 - \tilde{R})$; $\tilde{E}^{-1} = E_0^{-1}(1 + \tilde{K})$.

Рассмотрим случай нагружения материала при постоянной нагрузке. В этом случае закон деформирования можно выразить следующим образом:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[1 + \int_0^t K(t-s) ds \right].$$

Аналогично можно записать физические соотношения при постоянной деформации

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon_0 \left[1 - \int_0^t R(t-s) ds \right].$$

Модели контактного взаимодействия волокнистых материалов

Обзор современных исследований контактного взаимодействия в узлах трения из волокнистых композиционных материалов [7] показывает необходимость создания новых математических моделей, учитывающих расположение волокон в контактирующих телах и их влияния на коэффициент трения.

Рассмотрим следующие модели сопряжения цилиндрического тела с композитом (рис. 1, а-в):

- параллельно направлению скольжения параллельно оси X (продольное расположение волокон);
- параллельно оси Y (нормальное расположение волокон);

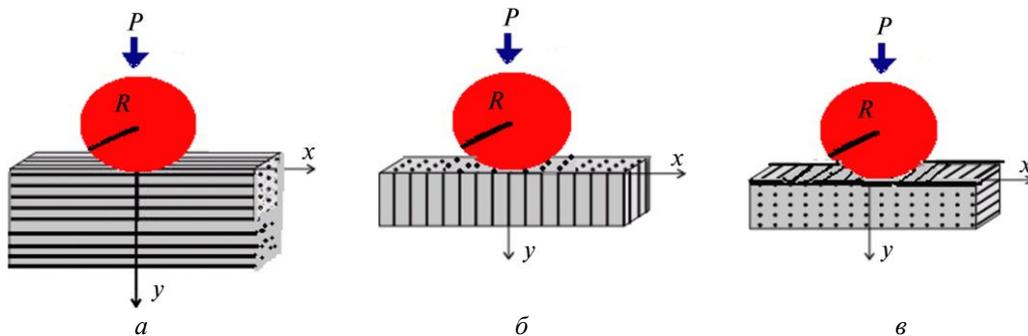


Рисунок 1 – Контакт жесткого шара: а – при продольном; б – при нормальном; в – при поперечном расположении волокон в матрице

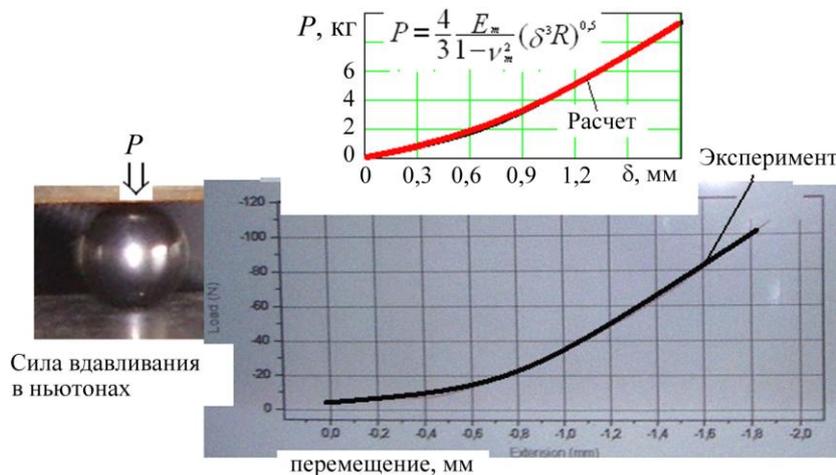


Рисунок 2 – Методика определения модуля упругости матрицы-резины при сжатии

– перпендикулярно плоскости XU (поперечное расположение волокон).

Для приближенных инженерных расчетов упругих постоянных (модулей упругости) волокнистых материалов можно воспользоваться методикой, изложенной в источнике [15]. Модуль упругости резины (матрицы) при сжатии находили из дополнительных экспериментов исходя из зависимости, определяющей связь силы вдавливания и перемещения в задаче Герца для жесткого шара и упругого полупространства.

$$P = \frac{4}{3} \frac{E_m}{1 - v_m^2} (\delta^3 R)^{0,5}. \quad (1)$$

На рис. 2 приводятся результаты эксперимента о вдавливании жесткого шара в достаточно толстый слой резины, который моделируется в виде полупространства. После обработки экспериментальных данных определили: $E_m = 8,5$ МПа, (при этом $v_m = 0,48$ приняли исходя из данных физико-механических свойств, для исследуемого типа резин). Модуль упругости стального волокна и коэффициент Пуассона задавали исходя из данных физико-механических свойств армирующих стальных волокон: $E_f = 210$ ГПа, $v_f = 0,3$.

Таким образом, $E_m = 8,5$ МПа, $E_f = 210000$ МПа, $v_m = 0,48$, $v_f = 0,3$, $V_f = 0,06$,

$V_m = 0,94$, индексы f и m обозначают волокно и матрицу соответственно. Введем обозначения:

$$n = \frac{E_f}{E_m}, \quad V_f = \mu = 0,06, \quad a = 1 + (n-1)\mu,$$

$$d = \mu + n(1-\mu), \quad \omega = v_m(1-\mu)n + v_f\mu, \quad c = 1 + (n-1)\mu,$$

Тогда имеем [15]: $v_{12} = v_m(1-\mu) + v_f\mu$,
 $E_1 = E_m(1-\mu) + E_f\mu$,

$$E_2 = \left(\frac{da-b}{cE_f} \right)^{-1},$$

$$E_2 = E_3,$$

$$G_{12} = \frac{2[n(1+v_m)(1+\mu) + (1+v_f)(1-\mu)]E_m}{4(1+v_m)[n(1+v_m)(1-\mu) + (1+v_f)(1+\mu)]}$$

$$v_{23} = \left[\left(\frac{E_2}{E_f} \right) \frac{(\omega a + b)}{c} \right],$$

$$G_{23} = \left[\frac{4(1+v_f)\mu + n(1+v_m)(1-\mu)}{2E_f} \right]^{-1}.$$

Рассчитав по данным формулам, при заданных модулях упругости матрицы и волокна, объемного содержания волокон в матрице, будем иметь следующие модули упругости и коэффициенты Пуассона для армированной полосы резины: $E_1 = 12606$ МПа, $E_2 = 12$ МПа, $G_{12} = 3,2$ МПа, $G_{23} = 2,2$; $v_{23} = v_{32} = 0,92$, $v_{12} = 0,47$ (см. рис. 1, а).

Таким образом, имея аналитические зависимости, определяющие физические параметры материала, т.е. модули упругости через объемное содержание волокон в матрице композита, можем перейти к решению статической задачи контакта. Армированная резиновая полоса является анизотропным (транверсально-изотропным) материалом. Для описания и определения параметров контакта в случае взаимодействия жесткого шара с анизотропным полупространством, например, резиновой матрицей, армированной волокнами, в основном используется задача типа Герца, в которой модуль упругости изотропного материала E заменяем на модуль упругости E_3 в направлении, перпендикулярном к площадке контакта. Такая замена недостаточно корректна и дает искаженные результаты при определении параметров контакта. Как показали теоретические и экспериментальные исследования [8, 16], зона контакта для анизотропного полупространства представляет собой эллипс, в отличие от изотропного, где зона контакта круг. Нахождение длин осей эллипса представляет собой непростую задачу, которая решается с помощью интегральных преобразований,

вычисления определенных интегралов [16]. Если при контакте шара с анизотропным полупространством размеры осей эллипса близки, то для тонкой анизотропного слоя толщины h возможное различие более значительно. Здесь сказывается не только отличие модулей упругости, но и очень сильное влияние оказывает различие коэффициентов Пуассона.

Контакт шарового и цилиндрических инденторов с тонким покрытием, лежащем на жестком основании

Рассмотрим контактную задачу о вдавливании жесткого шара в упругое изотропное покрытие, свободно лежащее на жестком основании (рис. 3). Аналитическое решение данной осесимметричной задачи находим, используя интегральное преобразование с ядром Ханкеля. Используя широко известную методику построения функции Грина для слоя, легко получаем асимптотические зависимости, определяющие компоненты перемещений в слое при действии давления в зоне контакта.

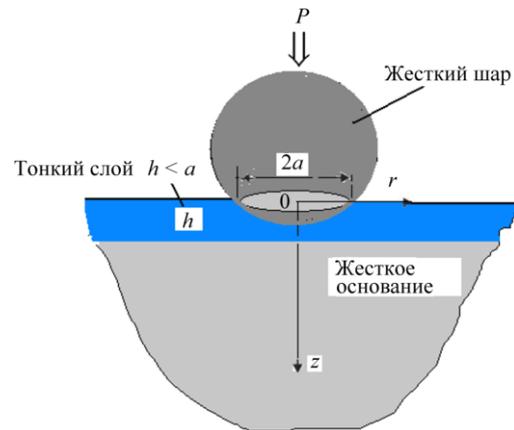


Рисунок 3 – Вдавливание жесткого шара в упругое покрытие

Возможен и другой путь, когда используется условие равновесия. Распределения контактных напряжений и соотношение между ними можно найти на основании приближенного анализа напряжений. Здесь мы рассмотрим приближенное решение, основанное на асимптотических зависимостях. В контактных задачах, когда толщина слоя, по сравнению с радиусом площадки контакта, мала, считаем, что напряжения σ_{zz} постоянны по толщине и зависят только от радиальной координаты.

Изотропный вязко-упругий слой. Контактная задача для вязкоупругого покрытия из композита решается на основе известных упругих решений с помощью принципа Вольтерра. Будем считать, что оператор $\tilde{v}_1 = v_0 = \text{const}$. Введем обозначения: радиус шара обозначим через R , а радиус площадки контакта через a . Используя условие равновесия в цилиндрической системе координат $r\theta z$

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0,$$

находим в слое радиальные, окружные и осевые компоненты деформаций ε_{rr} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, ε_{zz} и напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} в цилиндрической системе координат:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}, \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, \varepsilon_{zz} = \frac{1}{2Rh}(a^2 - r^2).$$

Используя уравнения равновесия, закон Гука и равенство Коши для деформаций, находим компоненты тензора напряжений в зоне контакта (аналогично как для упругого слоя [19]):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(t) &= -\frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{\tilde{E} \cdot (2a^2 - r^2)}{8Rh}, \\ \sigma_{\theta\theta}(t) &= -\frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{\tilde{E} \cdot (2a^2 - 3r^2)}{8Rh}, \\ \sigma_{zz}(t) &= \frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{\tilde{E} \cdot (a^2 - r^2)}{2Rh}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь интегральный оператор $\tilde{E} \cdot (\cdot)$ действует на временную функцию. Величина внедрения шара определяется соотношением

$$\nu = \frac{a^2}{2R}. \quad (3)$$

Отсюда из условия равновесия

$$P(a) = \int_0^a \sigma_{zz}(r)(2\pi r) dr,$$

можно найти радиус зоны контакта шара с поверхностью

$$a^4 = \frac{4(1-\nu^2)Rh}{\pi} \frac{1}{\tilde{E}} \cdot (P(a)), \quad (4)$$

где \tilde{E} – интегральный оператор. Дальнейший расчет будем проводить согласно [6]:

$$\tilde{E}^{-1} \cdot 1 = E_0^{-1} \left[1 + \int_0^t K(t-s) ds \right].$$

т.е. имеем функцию ползучести с ядром Ржаницына-Колтунова.

На основании методики расчета по предложенным зависимостям построен алгоритм, позволяющий проводить расчет и анализ параметров контактного взаимодействия индентора (цилиндра, шара) и основания из композита, для различных конструктивных параметров покрытия. Ширину площадки контакта определяем в различные моменты времени. Проводились экспериментальные исследования ползучести и релаксации резины, применяющейся для изготовления шины колеса при контактном взаимодействии.

Трансверсально-изотропный случай. Упругое решение. Ось упругой симметрии в направлении оси z.

Физические соотношения между компонентами напряжения и деформации в этом случае будут иметь вид [10, 20]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{rz} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{где } c_{11} = c_{22} &= \frac{1-\nu_{23}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta}, \quad c_{13} = c_{23} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \\ &= \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_3 \Delta}, \quad c_{33} = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}, \\ \Delta &= \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{13}\nu_{31}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}, \quad c_{44} = G_{12}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0,$$

где σ_{ij} – компоненты поля напряжений в слое, а c_{ij} являются константами упругости, выраженные через модули упругости.

Учитывая граничные условия контакта, а также уравнения равновесия, легко можно получить соотношение, определяющее перемещения и напряжения в зоне контакта. Аналогично, как и в упругом решении, контактное давление в зоне контакта будет иметь вид:

$$p(r) = -\sigma_{zz} = \frac{c_{33}}{2Rh}(a^2 - r^2). \quad (5)$$

После интегрирования условия равновесия, формула для определения радиуса зоны контакта будет иметь следующий вид (аналогичная формула представлена в [10]):

$$a = \left(\frac{4PRh}{\pi c_{33}} \right)^{\frac{1}{4}},$$

где c_{33} можно выразить через модули упругости [20]

$$c_{33} = \frac{E'}{1-2\frac{\nu'^2}{1-\nu} \frac{E}{E'}},$$

где E, E' – модули Юнга для растяжения и сжатия в плоскости изотропии и в направлении, перпендикулярно к ней; ν – коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в той же плоскости; ν' – коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении, нормальном к плоскости изотропии, при растяжении в этой плоскости. Для иллюстрации изменения напряжений в зоне контакта, для тонких изотропных покрытий (при $E = E'$, $\nu' = \nu$), построены асимптотические зависимости и определены напряжения (рис. 4).

Построен алгоритм определения параметров контакта вязкоупругого армированного слоя из резины. Так как толщина покрытия значительно меньше полуширины площадки контакта, то решение этой задачи сводится к использованию выше указанных асимптотических формул для упругого случая и затем, применением принципа Вольтерра, т.е. замену упругих постоянных на временные интегральные операторы. На основании упругого решения об определении размеров зон контакта при вдавливании жесткого шара в армированный слой, построено вязкоупругое решение. Радиус зоны контакта при контакте жесткого шара с изотропным покрытием определяется по зависимости:

$$a^4(t) = \frac{4}{\pi} RhP(1 - \nu_0^2) E_0^{-1} \left[1 + \int_0^t K(t-s) ds \right], \quad (6)$$

а при контакте жесткого цилиндра, для плоской деформации, по зависимостям из [6]:

$$a^3(t) = 1,5DRhP(1 - \nu_0^2) E_0^{-1} \left[1 + \int_0^t K(t-s) ds \right]; \quad (7)$$

$$p(x, t) = \frac{\tilde{E}_1}{4Rh(1 - \tilde{\nu}_1^2)} [a^2(t) - x^2]; \quad -a < x < a. \quad (8)$$

Аналогично получены зависимости для трансверсально-изотропного и ортотропного покрытия при вдавливании цилиндра и шара. Особенность решения контактной задачи для трансверсально-изотропного покрытия состоит в том, что в упругом решении входит константа c_{33} , которую следует заменить на интегральный оператор \tilde{c}_{33} . Даже если считать, что коэффициенты Пуассона ν_{23} , ν_{12} или ν' , поперечный модуль упругости E_3 или E' постоянные, все равно в оператор \tilde{c}_{33} входит модуль упругости E в сложном виде и это затруднительно для расшифровки операторов. Здесь \tilde{E}_1 и $\tilde{\nu}_1$ – интегральные операторы.

Трансверсально-изотропный случай, когда ось симметрии в направлении оси x . Используя подход, предложенный в [6] запишем основные

формулы, определяющие параметры контакта для цилиндрического индентора с ортотропным покрытием в случае, плоской деформации и когда размеры зоны контакта превышают толщину покрытия, т.е. $a > h$. Будем считать, что полуширина $a(t)$ изменяется монотонно, тогда можно применить принцип Вольтерра.

Для упрощения расчетов принимаем, что оператор $\tilde{\nu}_1 = \nu_1 = \text{const}$, где $\tilde{S} = \tilde{S}_{22} = \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{\tilde{E}_2}$ здесь

модуль упругости в направлении оси y заменили на оператор. Так как \tilde{E}_2^{-1} – возрастающая функция, то зона контакта постоянно увеличивается. Оператор \tilde{E}_2^{-1} действует на функцию времени $a(t)$ (при заданном линейном усилии P на длину цилиндра l), следовательно, после того как будет найдена функция $a(t)$

$$a^3(t) = \left(\frac{3}{2} hR\tilde{S}_{22} \cdot P \right), \quad -a < x < a. \quad (9)$$

можно вычислить контактное давление $p(x, t)$:

$$p(x, t) = \frac{\tilde{S}_{22}^{-1} \cdot (a^2(t) - x^2)}{2Rh}, \quad x < a. \quad (10)$$

Что касается упругого решения о вдавливании жесткого шара в слой с расположением волокон как на рис. 1, a , то тут возникают некоторые проблемы. Связь между перемещением и зоной контакта уравнение (3) выполняется для некоторого среднего радиуса, так как зона контакта будет эллипс, но и давление соответственно распределится немного по-другому. Поэтому предполагаем, что приближенно должно выполняться аналогичное условие только с площадями зон контакта. Считая, что при контакте шарового индентора с армированным резиновым слоем, в случае продольного расположения волокон (рис. 1, a), зона контакта будет эллипс, можно проверить на сколько допустимо применять зависимость, которая пригодна для упругого изотропного слоя $\nu = a^2/2R$ то есть связь перемещения и размеров зоны контакта для изотропного или для трансверсально-изотропного (нормальное расположение

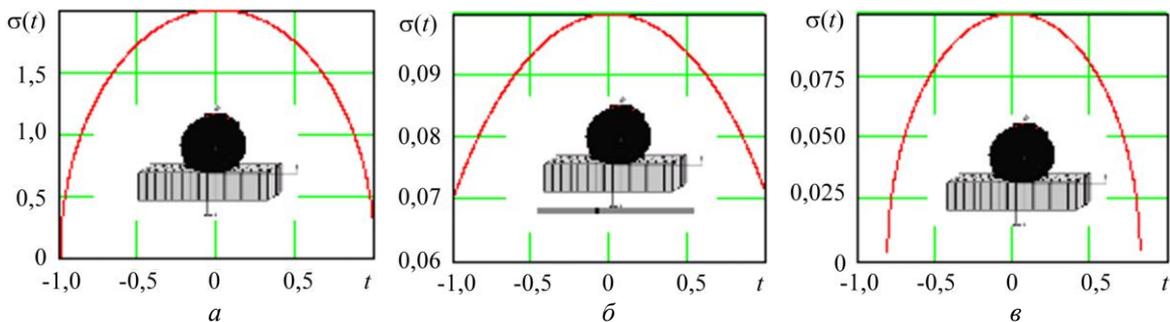


Рисунок 4 – Изменение напряжений в зоне контакта: шаровой индентор – армированное изотропное покрытие. Здесь рисунки $a, б, в$ соответственно для напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ (коэффициент Пуассона $\nu = 0,4$; единица напряжений – $\{[E/(1 - \nu^2)]a^2\}/Rh$)

волокон, рис. 1, б), Эта зависимость, после преобразования, будет иметь вид $v = \delta = \frac{a_x a_y}{2R}$, где a_x , a_y – полуоси эллипса контакта с площадью S_3 . Таким образом, перемещение легко определяется, используя площадь зоны контакта $\delta = \frac{S_3}{2\pi R}$. Чтобы сопоставить экспериментальные результаты, а также определить параметры контакта вводим некоторый усредненный радиус a круговой зоны контакта, который будет точным для контакта по схеме рис. 1, б и условным для схемы контакта рис. 1, а. Считаем, что площадь зоны контакта эллипса совпадает с площадью круговой зоны контакта. Поэтому желательно делать сравнение результатов эксперимента и расчета по площади контакта, для круга $S_k = \pi a^2$ и для эллипса $S_3 = \pi a^2 = \pi \sqrt{\frac{4}{\pi} R h P (1 - \nu_{23}^2) E_2^{-1}}$, а перемещение определяется по зависимости, считая, что $\nu_{23} = \nu_{32}$.

Описание и анализ решений контактной задачи для вязкоупругих тел хорошо известен. Для монотонно изменяющейся нагрузки принцип Вольтерра можно применять, но при решении задачи ползучести существуют ограничения. Так, Ли и Радок [17] показали, что для вязкоупругого полупространства, если зона контакта $a(t)$ изменяется не монотонно, то решение может быть неверным (если шар удалить, то зона контакта в определенный момент $a(t) > 0$ и $p(x, t) > 0$, а это не соответствует граничным условиям). Для нахождения асимптотических зависимостей в виде аналитических формул при вдавлении шара в упругий ортотропный слой необходимо обратиться к дополнительной литературе, например [11–13].

Экспериментальное исследование параметров контакта индентора с армированным слоем из резины

Исследование контакта металлического индентора с армированным слоем (полоской) из резины для брекера автомобильной шины включало: определение полуширины площадки контакта a и сближения δ (сделали переобозначение перемещения v на δ) в зависимости от нагрузки, толщины и объемной доли армировки, изучение ползучести и релаксации. Испытания проводили на установке, смонтированной на базе испытательной машины типа «INSTRON» (эксперименты проводились в ИММС НАН Беларуси). В качестве образцов материала для исследования составлена такая модель, которая имитирует упругие и вязкоупругие свойства шины. Процесс исследований состоял из следующей последовательности этапов: изготовление образцов контактирующих цилиндрических металлических инденторов и покрытий из резины (в том числе армированной), применяющейся для изготовления автопо-

крышек; исследование физико-механических свойств образцов; создание методики исследований; анализ влияния физико-механических и деформативных свойств покрытий в зависимости от действующих нагрузок (см. рис. 5).

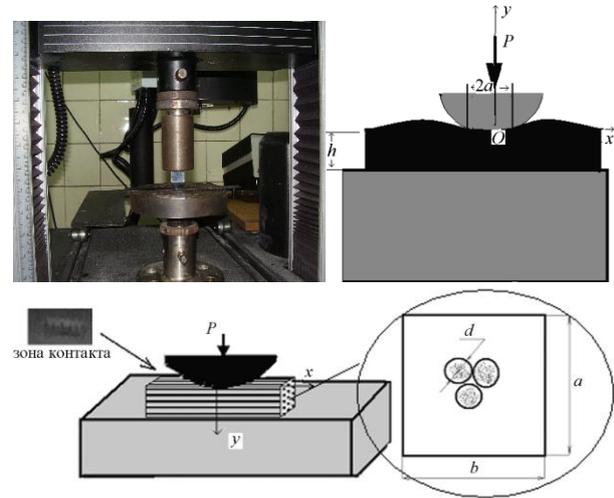


Рисунок 5 – Установка, образцы и модели для проведения эксперимента

Экспериментальное исследование проводили как для однородной резины, так и для армированной. На рис. 6 показана расчетная схема проведения экспериментов.

Исследование параметров контакта армированной резины. Для расчета влияния армирования на свойства материала и на контактную прочность проведены эксперименты по определению параметров контакта при взаимодействии шарового и цилиндрического инденторов с армированным слоем. Диаметр металлического волокна $d = 0,25$ мм, количество волокон – 3. Толщина резинового слоя $h = 1,9$ мм. Объемное содержание волокон 0,06. Было исследовано влияние ориентации волокон в покрытии и процесса релаксации на параметры контакта. На рис. 6 показана кривая изменения силы контакта в зависимости от вдавления и сравнение с теоретической, в случае контакта жесткого шара с армированной полоской резины.

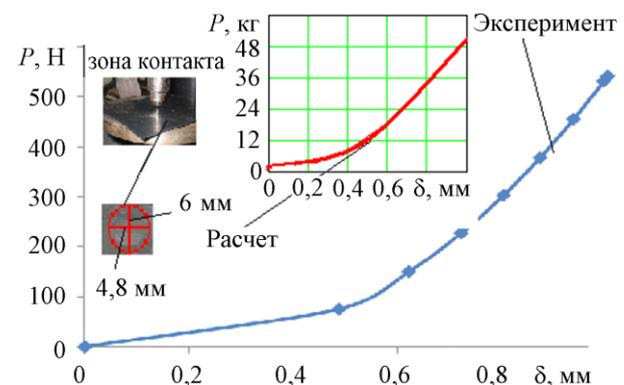


Рисунок 6 – Вдавление шара $d = 12,7$ мм в армированный лист резины брекера. Модуль упругости $E_2 \approx E_3 = 12$ МПа, $\nu_{23} = 0,87$. Изменение силы контакта в зависимости от перемещения. Упругий случай

Определялась зона контакта, которая имеет вид эллипса с осями 6 мм и 4,8 мм и измерялась через 10 мин после нагружения, для действующей силы вдавливания $P = 32$ кг.

Используя выше приведенные асимптотические зависимости и полученные формулы, можно рассчитать (как в упругом, так и в вязкоупругом случаях) параметры контакта, которые достаточно хорошо подтверждаются экспериментальными данными и определяют изменение контактной силы от перемещения. Так, для жесткого шарового индентора внедряющегося в армированный слой резины при условии, что толщина полосы (покрытия) $h < R$ имеем:

$$P(\delta) = \frac{\pi R}{h} \tilde{n}_{33} \delta^2,$$

Для цилиндрического индентора:

$$P(\delta) = \frac{0,943\sqrt{R}}{hS_{22}} \delta^{1,5}.$$

Строим теоретическое решение о релаксации напряжений (силы вдавливания) в армированном слое резины при контакте с шаровым индентором для фиксированного перемещения $\delta = 0,8$ мм используя упругое решение, затем, заменив упругие постоянные на интегральные операторы, которые действуют на 1, тогда будем иметь

$$P(\delta, t) = \frac{\pi R}{h} \tilde{c}_{33} \delta^2 \quad \text{— для шарового индентора и}$$

$$P(\delta) = \frac{0,943\sqrt{R}}{hS_{22}} \delta^{1,5} \quad \text{— для цилиндрического (дей-$$

ствия силы на единицу длины). Эксперименты показали, что для тонкой полоски (слое) в упругом случае коэффициент c_{33} можно заменить на $E_2/(1-\nu_{23}\nu_{32})$, а для вязкоупругого случая нужно модуль упругости E_2 заменить на оператор. На рис. 7 показан процесс релаксации в армированной полоске резины при фиксированных значениях коэффициентов Пуассона ν_{ij} для анизотропных материалов, где индексы i, j принимают значения 1–3, а

модуль упругости E_2 заменяем на оператор.

После обработки экспериментальных кривых ползучести и релаксации определили реологические постоянные, которые удовлетворительно описывают результаты эксперимента $E_2 = 12$ МПа, $\alpha = 0,011$, $A = 0,01$, $\lambda = 0,0231$. Модули упругости и коэффициенты Пуассона для анизотропных материалов определялись экспериментально и с помощью расчетов из позиций макромеханики и правил смесей (см. формулы приведенные выше). Следует отметить, что коэффициент Пуассона значительно влияет на результаты расчета и его определить для таких армированных материалов очень затруднительно. Как показали расчеты, используя для определения различные подходы и макромодели, коэффициент ν_{23} может меняться от 0,86 до 0,95. Аналогично отмечаем, что модули упругости армированной пластины из резины, определенные при сжатии отличаются от модулей упругости, определенных при растяжении. Для оценок изменения коэффициентов Пуассона в зависимости от модулей упругости следует пользоваться такими неравенствами [21]:

$$|\nu_{ij}| < \sqrt{\frac{E_i}{E_j}}, \quad \nu_{31} \nu_{12} \nu_{13} < \frac{1 - \nu_{31}^2 \frac{E_1}{E_3} - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1} - \nu_{23}^2 \frac{E_3}{E_2}}{2} < 0.$$

Здесь индексы $i, j = 1, 2, 3$ принимают значения в декартовой системе координат x, y, z .

Для сопоставления теоретических и экспериментальных результатов при определении параметров контакта, площадей зон контакта эллипса и круга, найдем площадь контакта эллипса (см. рис. 6) $S_3 = \pi a_x a_y 2a_x - 2a_y = 7,2 \pi$ мм². Площадь круга, для условного радиуса контакта a , будет определена по формуле:

$$S_k = \pi a^2 = \pi \sqrt{\frac{4}{\pi} RhP(1 - \nu_{23}^2) E_2^{-1}},$$

для действующей силы вдавливания $P = 35$ кг и вычисленных модулей упругости.

Расхождение между экспериментальными и тео-

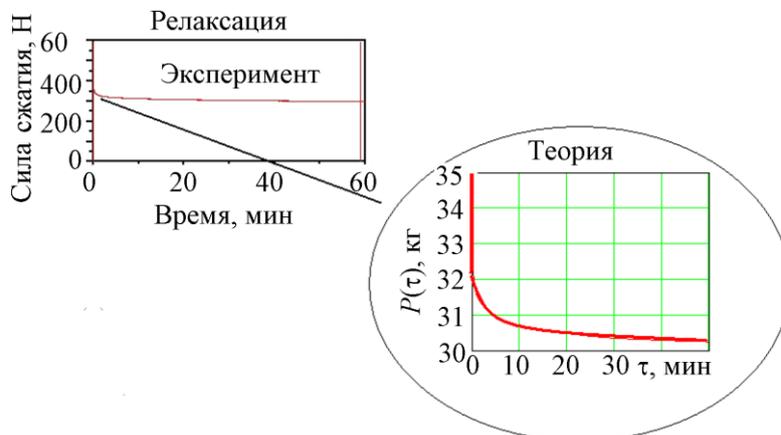


Рисунок 7 – Процесс релаксации АРМ резина – шар. Эксперимент и теоретический расчет

ретическими результатами очень зависит от принятого коэффициента Пуассона. Так, например, если возьмем $\nu_{23} = 0,87$, то теоретически определенная площадь контакта будет $S_k = \pi a^2 = 10,4\pi$ мм², а для $\nu_{23} = 0,95$ будем иметь $S_k = \pi a^2 = 6,6\pi$ мм². Расхождение результатов измерения и расчета еще вызвано тем, что для измерения зоны контакта шар был удален, и в тот же момент величина зоны контакта стала уменьшаться.

Аналогичные исследования по ползучести и релаксации также проводились и при решении задачи о вдавлении цилиндрического индентора в армированный слой резины. Прежде всего рассматривалась упругая задача по выявлению зависимостей действующей контактной силы и упругих перемещениях от расположения армирующих волокон в резиновом слое (полосе). На рис. 8, 9 представлены результаты расчета и эксперимента данных параметров контакта в зависимости от ориентации волокон.

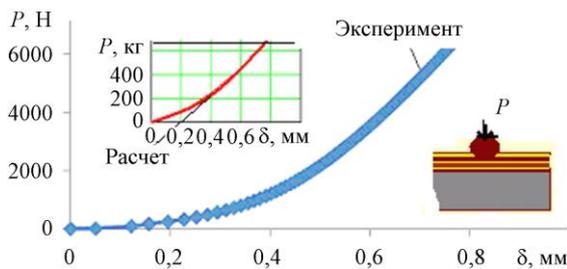


Рисунок 8 – Вдавление цилиндра (ось цилиндра, поперёк волокон) в армированный лист

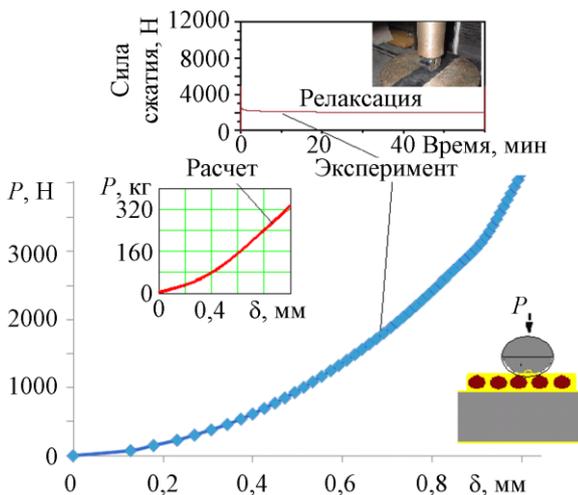


Рисунок 9 – Вдавление жесткого цилиндра (ось вдоль волокон) в армированный лист резины брекера. Эксперимент по релаксации при $\delta = 0,8$ мм

Используя выше приведенный математический аппарат расчета и обработки результатов легко можно представить теоретическое описание явления релаксации для других случаев расположения волокон в резиновом слое.

Выводы

Предложены математические модели процессов контактного взаимодействия шарового и цилиндрических инденторов с тонким армированным слоем резины с учетом явлений ползучести и релаксации. Экспериментальные исследования подтверждают достоверность предложенных теоретических зависимостей для определения параметров контакта на основе асимптотических методов теории упругости анизотропного тела.

Разработанная методика позволяет исследовать и создавать методы расчета композиционных покрытий и слоистых элементов машин из волокнистых материалов, а также определять их физико-механические свойства.

Обозначения

$\sigma(t)$ – напряжение, $\varepsilon(t)$ – деформация; E – модуль упругости; $R(t-s)$, $K(t-s)$ – функции влияния (ядро релаксации, ядро ползучести); t – время наблюдения; $\Gamma(x)$ – гамма-функция; A , λ , α – реологические параметры; E_0 – мгновенный модуль упругости; f и m – индексы обозначают волокно и матрицу соответственно; E_m , E_f – модули упругости матрицы и волокна; ν_f , ν_m – коэффициент Пуассона волокна и матрицы; $V_f = \mu$ – объемное содержание волокон в матрице; E_i, G_{ij}, ν_{ij} – модули упругости, сдвига и коэффициент Пуассона в направлениях i и j , $i, j = 1, 2, 3$; c_{ij} – константа упругости, выраженная через модули упругости; h , a – толщина и радиус контакта для слоя; d – диаметр волокна; $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}$ и $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$ – деформации и напряжения; $v = \delta$ – перемещение (величина вдавливания); P , R – сила вдавливания и радиус индентора; l – длина цилиндра; r – текущий радиус площадки контакта; $\tilde{E}_j, \tilde{E}_1, \tilde{\nu}, \tilde{R}, \tilde{K}, \tilde{S}, \tilde{S}_{22}$ – интегральные операторы; σ_{ij} – скалярные компоненты поля напряжений в слое, а c_{ij} – являются константами упругости, выраженные через модули упругости; E, E' – модули Юнга для растяжения и сжатия плоскости изотропии и в направлении, перпендикулярно к ней; ν – коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в той же плоскости; ν' – коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении, нормальном к плоскости изотропии при растяжении в этой плоскости; $p(x, t)$ – давление в контакте; S_s, S_k – площадь зоны контакта эллипса и круга; $2a_x, 2a_y$ – оси эллипса зоны контакта; a – радиус зоны контакта круга; x, y, z – декартова система координат; r, θ, z – цилиндрическая система координат.

Литература

1. Можаровский, В.В. Моделирование напряженно-деформированного состояния массивных шин из армированных материалов // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2008. – Т. 13. – № 3. – С. 14–21.
2. Можаровский, В.В. Определение сопротивления качению автомобильных шин в зависимости от условий эксплуатации / В.В. Можаровский, С.В. Шилько, С.Б. Анфиногенов, А.В. Хотько // *Трение и износ*. 2007 – Т. 28. – № 2. – С. 151–157.
3. Можаровский, В.В. Исследование напряженного состояния волокнистого композиционного материала с однородным покрытием при контакте с цилиндрическим индентором / В.В. Можаровский, Н.А. Рогачева // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2000. – Т. 5. – № 2. – С. 5–10.
1. Pleskachevsky, Yu. M. Mathematical models of quasi-static interaction between fibrous composite bodies / *Computational methods in contact mechanics III* Yu.M. Pleskachevsky, V.V. Mozharovsky, Yu.F. Rouba // *Proc. Int. Conf., Madrid, July 3–5, 1997. – Madrid, 1997. – P. 363–372.*
2. Можаровский, В.В. Анализ контактного взаимодействия автомобильной шины с колесным диском и дорожным покрытием / В.В. Можаровский, С.В. Шилько // *Доклады Белорусского конгресса по механике*. – Мн., 2007. – С. 135–142.
3. Можаровский, В.В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Мн.: Наука и техника, 1988. – 290 с.
4. Davies, G.A. Impact on composite structures / G.A. Davies, R. Olsson // *The Aeronautical Journal*. – 2004. – Vol. 35, № 11. – P. 541–563.
5. Грещук, Л.В. Динамика удара / Под ред. С.С. Григорьяна. – М., 1985. – С. 8–46.
6. Напряженно-деформированное состояние композиционных покрытий в трибологических системах / В.В. Можаровский [и др.] // *Трение и износ*. – 2001. – Т. 22, № 4. – С. 379–385.
7. Xinguo Ning. Analysis of the tribological behavior in transversely isotropic materials utilizing analytical and finite element methods analysis of the tribological behavior in transversely isotropic materials utilizing analytical and finite element methods/ University of Pittsburgh PhD. THESIS.2002 [Электронный ресурс] Xinguo Ning. Режим доступа: http://d-scholarship.pitt.edu/10048/1/XinguoNing_Dec13.pdf Дата доступа: 06.12.2016.
8. Argatov, I.I. Small-scale indentation of a hemispherical inhomogeneity in an elastic half-space / I.I. Argatov, F.J. Sabina // *European Journal of Mechanics A/Solids* – 2015. – Vol. 53. – P. 151–162.
9. Argatov, I.I. Asymptotic analysis of the substrate effect for an arbitrary indenter / I.I. Argatov, F.J. Sabina // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* – 2013. – Vol. 66. – P. 75–95.
10. Argatov, I.I. Small-scale indentation of an elastic coated half-space: influence of poisson's ratios on the substrate effect / I.I. Argatov, F.J. Sabina // *International Journal of Engineering Science*. – 2014. – Vol. 81. – P. 33–40.
11. Работнов, Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Работнов Ю.Н. – М.: Наука, 1966. – 753 с.
12. Малмейстер, А.К. Сопротивление жестких полимерных материалов / А.К. Малмейстер, В.П. Тамуж, Г.А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1967. – 394 с.
13. Swanson, S.R., Hertzian contact of orthotropic materials // *Int. J. Solids Struct.* – 2004. – Vol. 41. – P. 1945–1959.
14. Lee, E.H. The contact problem for viscoelastic bodies / E.H. Lee, J.R.M. Radok // *J. Appl. Mech.* – 1960. – Vol. 27(3). – P. 438–444.
15. Колтунов, М.А. Ползучесть и релаксация / М.А. Колтунов М., Высш. Школа, 1976. – 276 с.
16. Конвей. Удар жесткой сферы в тонкий слой/ Конвей, Ли, Бейер // *Прикладная механика*. – 1970. – № 1. – С. 166–170.
17. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
18. Кристерсен Р. Введение в механику композитов / Р. Кристерсен. – М.: Мир, 1982. – 336 с.

Mozharovsky V.V.

About the contact between a rigid indenter with a reinforced rubber layer with account of the phenomena of viscoelasticity.

Reviewed analytical and numerical solution of a static indentation and descriptions of creep relaxation in the coating of composites. The proposed model of contact interaction of fibrous materials is investigated the contact ball and cylindrical indenters in thin layer lying on a rigid Foundation. The proposed analytical dependences for determining parameters of contact reinforced with metallic fibers thin rubber layer, based on the asymptotic dependencies of the theory of elasticity of an anisotropic body. Experimental study of parameters of contact of the indenter with a reinforced layer of rubber.

Keywords: model of contact interaction, thin coating, reinforced rubber band, relaxation.

Поступила в редакцию 02.11.2016.

© В.В. Можаровский, 2017.