

УДК 539.3

## НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО МЕТАЛЛОПОЛИМЕРНОГО СТЕРЖНЯ ЛОКАЛЬНЫМИ НАГРУЗКАМИ

М. А. ЖУРАВКОВ<sup>1</sup>, Э. И. СТАРОВОЙТОВ<sup>2+</sup>, Д. В. ЛЕОНЕНКО<sup>2</sup><sup>1</sup> Министерство образования Республики Беларусь, ул. Советская, 9, 220010 г. Минск, Беларусь.<sup>2</sup> УО «Белорусский государственный университет транспорта», ул. Кирова, 34, 246653 г. Гомель, Беларусь.

*Рассмотрено деформирование трехслойного металлополимерного стержня с упругопластическими несущими слоями и физически нелинейным заполнителем при воздействии локальных прямоугольной и синусоидальной нагрузок. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета стержня приняты гипотезы ломаной нормали. Приведена постановка краевых задач и методы их решения. Получены аналитические решения в итерациях задач теории малых упругопластических деформаций. Проведен численный анализ решений.*

**Ключевые слова:** трехслойный металлополимерный стержень, локальные нагрузки, пластичность.

### Введение

В интенсивно развивающихся отраслях промышленности – авиа-, ракето- и судостроении, машино- и приборостроении, а также промышленном и гражданском строительстве все более широкое применение находят слоистые элементы конструкций, выполненные в виде стержней, пластин и оболочек как из традиционных (металлы, сплавы), так и новых композиционных материалов, в том числе на основе полимеров. Несущие высокопрочные слои воспринимают основную механическую нагрузку. Внутренний слой (заполнитель) обеспечивает перераспределение усилий между несущими слоями и защиту от внешних тепловых, радиационных и вибрационных воздействий. В связи с этим актуальной становится проблема разработки математических моделей деформирования трехслойных элементов конструкций при различных внешних нагрузках.

В монографиях [1–5] рассматриваются различные математические модели деформирования однородных и неоднородных, как правило, упругих элементов конструкций, приведены постановки краевых задач, изложены методы их расчета. Статьи [6–10] посвящены исследованию квазистатического деформирования композитных элементов конструкций при различных силовых и тепловых воздействиях. Динамическое поведение трехслойных стержней и пластин рассмотрено в работах [11–13]. В настоящее время отсутствуют пуб-

ликации по деформированию физически нелинейных металлополимерных трехслойных стержней при локальных нагрузках.

Здесь, в рамках теории малых упругопластических деформаций [14], рассмотрено деформирование локальными прямоугольными и синусоидальными нагрузками несимметричных по толщине трехслойных стержней с упругопластическими несущими металлическими слоями и физически нелинейно-упругим полимерным заполнителем.

### Нагружение из естественного состояния

Рассматривается деформирование несимметричного по толщине трехслойного металлополимерного стержня, несущие слои которого выполнены из упругопластического материала, а несжимаемый по толщине заполнитель – нелинейно-упругий. Система координат  $x, y, z$  связывается со срединной плоскостью заполнителя (рис. 1, а, б). Принимается, что в тонких несущих слоях 1, 2 справедливой гипотезы Бернулли, в жестком несжимаемом по толщине сравнительно толстом заполнителе 3 нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi(x)$ .

На внешний слой стержня действует поверхностная силовая нагрузка  $q(x)$ , при этом соответствующие траектории нагружения относятся к классу простых [14], через  $w(x)$  и  $u(x)$  обозначены

+ Автор, с которым следует вести переписку. E-mail: edstar0@yandex.by.

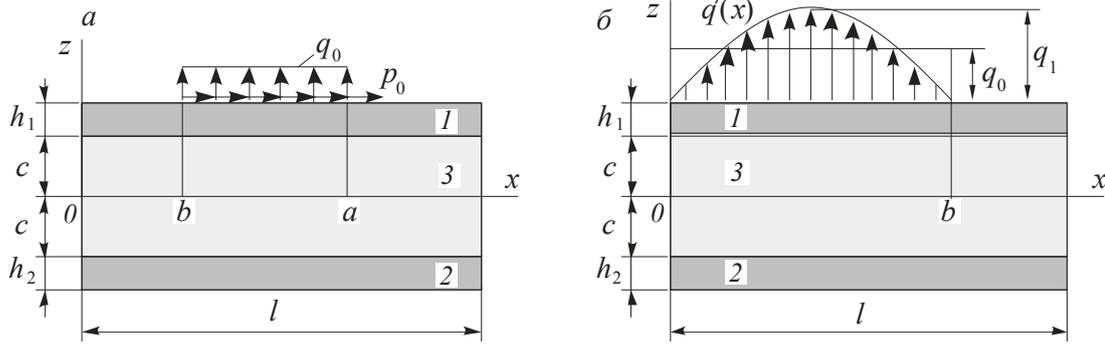


Рисунок 1 – Схемы нагружения трехслойного стержня

прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя (штрих вверх здесь и в дальнейшем соответствует нагружению из естественного состояния). На торцах предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев, на границах слоев – склейки. С помощью введенных гипотез, продольные перемещения в слоях  $u^{(k)}$  выражаются через три искомые функции  $u(x)$ ,  $\psi(x)$  и  $w(x)$ :

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,x} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \\ u^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,x} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,x} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $z$  – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате;  $h_1, h_2, h_3 = 2c$  – толщины слоев; верхний индекс  $k$  – номер слоя.

Деформации в стержне следуют из перемещений (1) и соотношений Коши [4]. Введем обобщенные внутренние усилия и моменты в стержне:

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=1}^3 N^{(k)} = b_0 \sum_{k=1}^3 \int_h \sigma_{xx}^{(k)} dz, \quad M = \sum_{k=1}^3 M^{(k)} = b_0 \sum_{k=1}^3 \int_h \sigma_{xx}^{(k)} z dz, \\ Q &= b_0 \int_h \sigma_{xz}^{(3)} dz, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\sigma_{ij}^{(k)}$  – компоненты тензора напряжений в  $k$ -м слое при нагружении из естественного состояния;  $b_0$  – ширина сечения стержня.

В слоях стержня используются физические соотношения теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [14]:

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(k)} &= 2G_k f^{(k)}(\epsilon_u^{(k)}) \mathfrak{e}_{ij}^{(k)}, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k \epsilon^{(k)} \quad (k=1, 2; \quad i, j=x, y, z). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $s_{ij}^{(k)}, \mathfrak{e}_{ij}^{(k)}$  – девиаторы напряжений и деформаций;  $\sigma^{(k)}, \epsilon^{(k)}$  – шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $G_k, K_k$  – модули сдвига и объемного деформирования материалов слоев;

$$f^{(k)}(\epsilon_u^{(k)}) = \begin{cases} 1, & \epsilon_u^{(k)} \leq \epsilon_y^{(k)}, \\ 1 - \omega^{(k)}(\epsilon_u^{(k)}), & \epsilon_u^{(k)} > \epsilon_y^{(k)}, \end{cases}$$

$\omega^{(k)}$  – функция пластичности Ильюшина в несущих слоях и физической нелинейности в заполнителе, которую для металлов и полимеров при нагружении из естественного состояния можно принять в виде:

$$\omega^{(k)}(\epsilon_u) = \begin{cases} 0, & \epsilon_u \leq \epsilon_y^{(k)}, \\ A_0 \left( 1 - \frac{\epsilon_y^{(k)}}{\epsilon_u^{(k)}} \right)^{\alpha_0}, & \epsilon_u > \epsilon_y^{(k)}, \end{cases} \quad (4)$$

$\epsilon_u^{(k)}$  – интенсивность деформаций;  $\epsilon_y^{(k)}$  – деформационный предел текучести материала;  $A_0, \alpha_0$  – экспериментально полученные константы каждого материала, значения некоторых приведены в [4].

Компоненты тензора напряжений в слоях, используя (3), представим через девиатор и шаровую часть тензора деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)} &= s_{xx}^{(k)} + \sigma^{(k)} = 2G_k \mathfrak{e}_{xx}^{(k)} + 3K_k \epsilon^{(k)} - 2G_k \mathfrak{e}_{xx}^{(k)} \omega^{(k)}, \\ \sigma_{xz}^{(3)} &= s_{xz}^{(3)} = 2G_3 \mathfrak{e}_{xz}^{(3)} - 2G_3 \mathfrak{e}_{xz}^{(3)} \omega^{(3)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Выделим в компонентах напряжений (5) упругие (индекс «e») и неупругие (индекс «ω») слагаемые:

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \sigma_{xx}^{(k)e} - \sigma_{xx}^{(k)\omega}, \quad \sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{xz}^{(3)e} - \sigma_{xz}^{(3)\omega}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)e} &= 2G_k \mathfrak{e}_{xx}^{(k)} + 3K_k \epsilon^{(k)}, \quad \sigma_{xx}^{(k)\omega} = 2G_k \mathfrak{e}_{xx}^{(k)} \omega^{(k)}, \\ \sigma_{xz}^{(3)e} &= 2G_3 \mathfrak{e}_{xz}^{(3)}, \quad \sigma_{xz}^{(3)\omega} = 2G_3 \mathfrak{e}_{xz}^{(3)} \omega^{(3)}. \end{aligned}$$

Проведя подобную операцию с внутренними усилиями (2), получим:

$$\begin{aligned} N^{(k)} &= N^{(k)e} - N^{(k)\omega}, \quad M^{(k)} = M^{(k)e} - M^{(k)\omega}, \\ Q^{(3)} &= Q^{(3)e} - Q^{(3)\omega}. \end{aligned} \quad (7)$$

Упругие (индекс «e») и неупругие (индекс «ω») составляющие усилий в (7) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
N^{(k)e} &= b_0 \int \sigma_{xx}^{(k)e} dz, & N^{(k)\omega} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)\omega} dz, \\
M^{(k)e} &= b_0 \int \sigma_{xx}^{(k)e} z dz, & M^{(k)\omega} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)\omega} z dz, \\
Q^{(3)e} &= b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)e} dz, & Q^{(3)\omega} &= b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)\omega} dz.
\end{aligned} \quad (8)$$

Система дифференциальных уравнений равновесия стержня для определения искоемых перемещений получена в [4, 10] с помощью метода Лагранжа. В нашем случае она будет

$$\begin{aligned}
a_1 u_{,xx} + a_6 \Psi_{,xx} - a_7 w_{,xxx} &= -p + p_\omega, \\
a_6 u_{,xx} + a_2 \Psi_{,xx} - a_3 w_{,xxx} - a_5 \Psi &= h_\omega, \\
a_7 u_{,xxx} + a_3 \Psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxx} &= -q + q_\omega.
\end{aligned} \quad (9)$$

Здесь коэффициенты

$$\begin{aligned}
a_1 &= K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + 2K_3^+ c; & a_2 &= c^2 \left[ K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + \frac{2}{3} K_3^+ c \right]; \\
a_3 &= c \left[ K_1^+ h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) + K_2^+ h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right]; \\
a_4 &= K_1^+ h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) + K_2^+ h_2 \left( c + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3; \\
a_5 &= 2G_3 c; & a_6 &= c \left[ K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2 \right]; \\
a_7 &= K_1^+ h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) - K_2^+ h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right);
\end{aligned}$$

величины  $p_\omega$ ,  $h_\omega$ ,  $q_\omega$  учитывают физическую нелинейность материалов слоев и вычисляются по формулам, следующим из (6) и (8):

$$\begin{aligned}
p_\omega &= \frac{1}{b_0} N_{,x}^\omega, & h_\omega &= \frac{1}{b_0} (H_{,x}^\omega - Q^\omega), & q_\omega &= \frac{1}{b_0} M_{,xx}^\omega. \quad (10) \\
N^\omega &= \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 G_k \int \omega_k \varepsilon_{xx}^{(k)} dz, & M^\omega &= \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 G_k \int \omega_k \varepsilon_{xx}^{(k)} z dz, \\
Q^\omega &= 2b_0 G_3 \int_{-c}^c \omega_3 \Psi dz.
\end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений (9) существенно нелинейная. Поэтому рассмотрим возможность применения метода «упругих» решений Ильюшина к решению данной задачи. Предположим, что в (9), (10) содержится малый параметр, например, все  $\omega_k < 1$ . Тогда возможен метод итераций, основанный на методе упругих решений, при котором для любого  $n$ -го приближения система уравнений (9) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
a_1 u_{,xx}^{(n)} + a_6 \Psi_{,xx}^{(n)} - a_7 w_{,xxx}^{(n)} &= -p + p_\omega^{(n-1)}, \\
a_6 u_{,xx}^{(n)} + a_2 \Psi_{,xx}^{(n)} - a_3 w_{,xxx}^{(n)} - a_5 \Psi^{(n)} &= h_\omega^{(n-1)}, \\
a_7 u_{,xxx}^{(n)} + a_3 \Psi_{,xxx}^{(n)} - a_4 w_{,xxx}^{(n)} &= -q + q_\omega^{(n-1)},
\end{aligned} \quad (11)$$

Величины  $p_\omega^{(n-1)}$ ,  $h_\omega^{(n-1)}$ ,  $q_\omega^{(n-1)}$ , соответствующие неупругим составляющим, на первом шаге ( $n = 1$ ) принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения и носят название дополнительных «внешних» нагрузок. Они служат поправками на пластичность и физическую нелинейность материалов слоев:

$$\begin{aligned}
p_\omega^{(n-1)} &= \frac{1}{b_0} N_{,x}^{\omega(n-1)}, & h_\omega^{(n-1)} &= \frac{1}{b_0} (H_{,x}^{\omega(n-1)} - Q^{\omega(n-1)}), \\
q_\omega^{(n-1)} &= \frac{1}{b_0} M_{,xx}^{\omega(n-1)}, \\
N^{\omega(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 N^{(k)(n-1)} = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 \int G_k \omega^{(k)} (\varepsilon_u^{(k)(n-1)}) \varepsilon_{xx}^{(k)(n-1)} dz, \\
M^{\omega(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 M^{(k)(n-1)} = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 \int G_k \omega^{(k)} (\varepsilon_u^{(k)(n-1)}) \varepsilon_{xx}^{(k)(n-1)} z dz, \\
H^{\omega(n-1)} &= c (N^{(1)\omega(n-1)} - N^{(2)\omega(n-1)}) + M^{(3)\omega(n-1)}, \\
Q^{\omega(n-1)} &= 2b_0 \int_{-c}^c G_3 \omega^{(3)} (\varepsilon_u^{(3)(n-1)}) \Psi^{(n-1)} dz.
\end{aligned}$$

Применение метода упругих решений позволяет на каждом шаге приближения рассматриваемую задачу сводить к линейной задаче теории упругости с дополнительными «внешними» нагрузками.

### Локальная прямоугольная нагрузка

Ее аналитический вид (см. рис. 1, а):

$$\begin{aligned}
q(x) &= q_0 (H_0(a-x) - H_0(b-x)), \\
p(x) &= p_0 (H_0(a-x) - H_0(b-x)),
\end{aligned} \quad (12)$$

где  $H_0(x)$  – функция Хевисайда.

Решение системы уравнений (11) при нагрузке (12) можно выписать, базируясь на известном решении задачи теории упругости [5, 10]. В нашем случае оно имеет следующий рекуррентный вид:

$$\begin{aligned}
\Psi^{(n)}(x) &= C_2^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) + C_3^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) + \\
&+ \frac{1}{\beta^2} \left[ \gamma_2 p_0 ((\operatorname{ch}(\beta x - \beta a) - 1) H_0(a-x) - \right. \\
&- (\operatorname{ch}(\beta x - \beta b) - 1) H_0(b-x)) - \\
&- \frac{\gamma_1 q_0}{\beta} ((\beta x - \beta a - \operatorname{sh}(\beta x - \beta a)) H_0(a-x) - \\
&- (\beta x - \beta b - \operatorname{sh}(\beta x - \beta b)) H_0(b-x)) - \gamma_1 C_1^{(n)} \left. \right] + \\
&+ \frac{1}{\beta} \left[ \operatorname{sh}(\beta x) \int g_{\omega 1}^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g_{\omega 1}^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx \right], \\
u^{(n)}(x) &= \gamma_3 \Psi^{(n)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\alpha_2} \left[ a_4 L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) - a_4 (p_0 (H_2(a-x) - H_2(b-x)) - \right. \\
 & \left. - a_7 q_0 (H_3(a-x) - H_3(b-x)) - L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_7}{2} C_1^{(n)} x^2 \right] + \\
 & + C_7^{(n)} x + C_8^{(n)} ; \\
 w^{(n)}(x) & = \frac{1}{\alpha_2} \times \\
 & \times \left[ \alpha_1 \int \Psi^{(n)} dx + a_7 (p_0 (H_3(a-x) - H_3(b-x)) + L_3^{-1}(p_\omega^{(n-1)})) + \right. \\
 & + a_1 (q_0 (H_4(a-x) - H_4(b-x) - L_4^{-1}(q_\omega^{(n-1)}))) + \\
 & \left. + \frac{a_1 C_1^{(n)}}{6} x^3 \right] + \frac{C_4^{(n)}}{2} x^2 + C_5^{(n)} x + C_6^{(n)} . \tag{13}
 \end{aligned}$$

Здесь введена функция

$$g_{\omega 1}^{(n)}(x) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \gamma_1 h_\omega^{(n-1)} - \gamma_2 p_\omega^{(n-1)} - \gamma_1 \left( \int q_\omega^{(n-1)} dx + C_1^{(n)} \right) ;$$

коэффициенты и линейные интегральные операторы

$$\beta^2 = \frac{a_1 a_5 \alpha_2}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}, \quad \gamma_1 = \frac{a_1 \alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2},$$

$$\gamma_2 = \frac{a_6 \alpha_2 - a_7 \alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}, \quad \gamma_3 = \frac{a_3 a_7 - a_4 a_6}{\alpha_2},$$

$$\alpha_1 = a_1 a_3 - a_6 a_7, \quad \alpha_2 = a_1 a_4, \quad -a_7^2, \quad \alpha_3 = a_1 a_2 - a_6^2 ;$$

$$L_2^{-1}(g(x)) \equiv \iint g(x) dx dx ; \quad L_3^{-1}(g(x)) \equiv \iiint g(x) dx dx dx ;$$

$$L_4^{-1}(g(x)) \equiv \iiint g(x) dx dx dx dx .$$

Константы интегрирования  $C_1^{(n)}, \dots, C_8^{(n)}$  на каждом шаге приближения следуют из условий закрепления стержня. При консольной заделке левого конца стержня должны выполняться условия:

$$x = 0: \quad w = w_{,x} = u = \psi = 0 ;$$

$$x = l: \quad \psi = N = M = M_{,x} = 0 . \tag{14}$$

Удовлетворяя решением (13) граничные условия (14) получим:

$$C_1^{(n)} = L_1^{-1}(q_\omega^{(n-1)})|_{x=l} ,$$

$$\begin{aligned}
 C_2^{(n)} & = \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\text{ch}(\beta l)}{\text{sh}(\beta l)} \left( \int g_{\omega 1}^{(n)} \text{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=l} - \int g_{\omega 1}^{(n)} \text{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=0} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\gamma_2 p_0}{\beta} (\text{ch}(\beta b) - \text{ch}(\beta a)) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2} (a\beta - b\beta + \text{sh}(\beta b) - \text{sh}(\beta a)) + \frac{\gamma_1 C_1}{\beta} (1 - \text{ch}(\beta l)) \right) - \right. \\
 & \left. - \int g_{\omega 1}^{(n)} \text{ch}(\beta x) dx \Big|_{x=l} + \gamma_1 C_1 \frac{\text{sh}(\beta l)}{\beta} \right] ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_3^{(n)} & = \frac{1}{\beta} \int g_{\omega 1}^{(n)}(x) \text{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=0} + \\
 & + \frac{1}{\beta^2} (\gamma_2 p_0 (\text{ch}(\beta b) - \text{ch}(\beta a)) - \\
 & - \frac{1}{\beta} \gamma_1 q_0 (a\beta - b\beta + \text{sh}(\beta b) - \text{sh}(\beta a)) + \gamma_1 C_1) ,
 \end{aligned}$$

$$C_4^{(n)} = -\frac{a_7}{\alpha_2} L_1^{-1}(p_\omega^{(n-1)})|_{x=l} + \frac{a_1}{\alpha_2} L_2^{-1}(q_\omega^{(n-1)})|_{x=l} - \frac{a_1}{\alpha_2} C_1^{(n)} l ,$$

$$\begin{aligned}
 C_5^{(n)} & = \frac{1}{\alpha_2} \left( a_7 \left( p_0 \frac{a^2 - b^2}{2} - L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \right) \Big|_{x=0} + \right. \\
 & \left. + a_1 \left( q_0 \frac{a^3 - b^3}{6} - L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) \right) \Big|_{x=0} \right) ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_6^{(n)} & = \frac{1}{\alpha_2} \left( a_7 \left( p_0 \frac{b^3 - a^3}{6} - L_3^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \right) \Big|_{x=0} - \right. \\
 & \left. - a_1 \left( q_0 \frac{a^4 - b^4}{24} - L_4^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{x=0} \right) - \alpha_1 \int \Psi^{(n)} dx \Big|_{x=0} \right) ,
 \end{aligned}$$

$$C_7^{(n)} = -\frac{1}{\alpha_2} \left[ a_4 L_1^{-1}(p_\omega^{(n-1)})|_{x=l} - a_7 (L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)})|_{x=l} + C_1^{(n)} l) \right] ,$$

$$\begin{aligned}
 C_8^{(n)} & = \frac{1}{\alpha_2} \left( a_4 \left( p_0 \frac{a^2 - b^2}{2} - L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{x=0} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - a_7 \left( q_0 \frac{b^3 - a^3}{6} - L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{x=0} \right) \right) . \tag{15}
 \end{aligned}$$

На первом шаге приближения ( $n = 1$ ) из соотношений (13), (15) следует решение линейной задачи теории упругости.

### Численные результаты

При численной реализации решения для стержня единичной длины принимались относительные толщины слоев  $h_1 = 0,02$ ,  $h_2 = 0,04$ ,  $c = 0,09$ . Прямоугольной локальной нагрузке имеет интенсивность  $q_0 = -3,5$  МПа ( $p_0 = 0$ ) и равномерно распределена на отрезке  $[0, a]$  ( $b = 0$ ). Материалы слоев: сплав Д16Т-фторопласт-4-Д16Т.

Численный счет продемонстрировал практическую сходимость метода упругих решений. За искомое решение здесь и далее принято 8-е приближение, которое отличается от предыдущего менее чем на 1%.

На рис. 2, а, б показано изменение прогиба и сдвига в заполнителе по оси трехслойного стержня в зависимости от длины пятна нагрузки (без штриха упругий стержень, со штрихом – упругопластический):  $1 - a = 0,50l$ ;  $2 - a = 0,75l$ ;  $3 - a = l$ . При  $a = 0,5l$  области пластического деформирования малы и упругопластический прогиб увеличивается на 3–4%; при  $a = 0,75l$  рост составляет 6–7%, если нагрузка действует по всей поверхно-

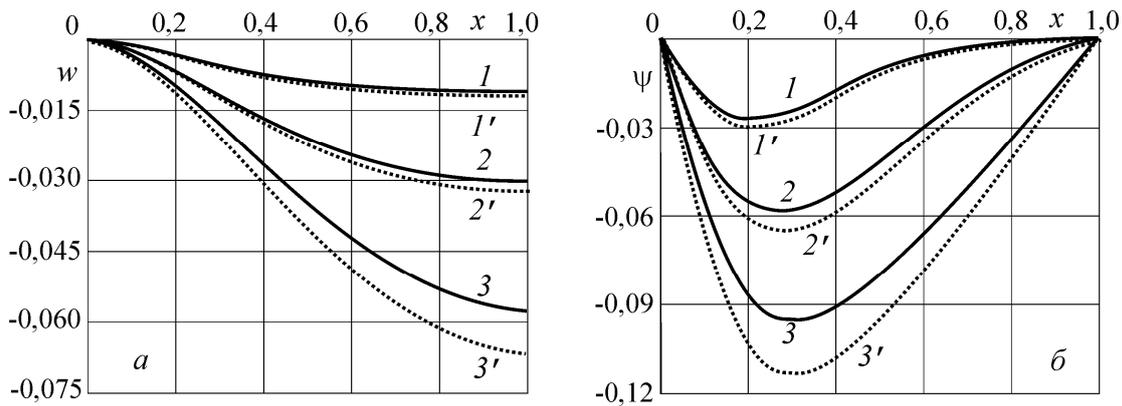


Рисунок 2 – Прогиб – а и сдвиг – б при прямоугольной нагрузке

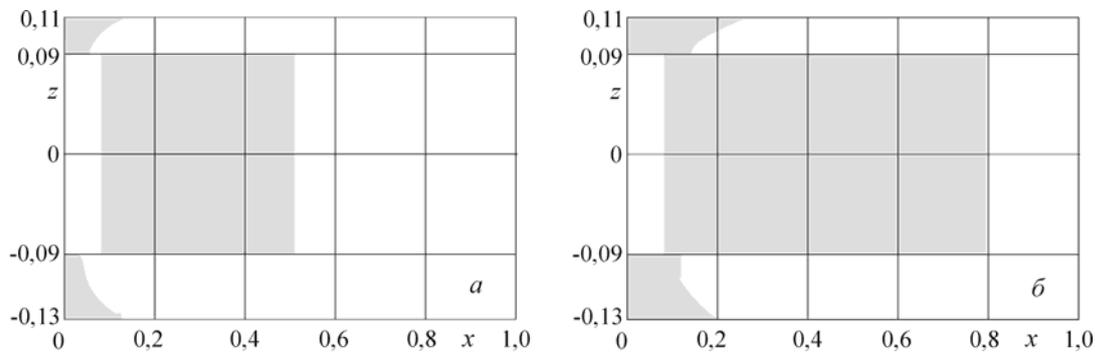


Рисунок 3 – Области нелинейности в продольном сечении стержня

сти стержня ( $a = l$ ), то рост до 15%. Для сдвигов соответствующие увеличения следующие: 5%, 9–10%; 18–19%.

Рис. 3, а, б иллюстрирует распределение областей физической нелинейности материалов слоев в продольном сечении стержня (серая заливка) при  $a = 0,75l$  и  $a = l$  соответственно. Как и следовало ожидать, области нелинейности во втором случае существенно возрастают.

**Локальная поперечная синусоидальная нагрузка**

Ее аналитический вид (см. рис. 1, б):

$$q(x) = q_0 H_0(b-x) \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right). \tag{16}$$

Соответствующее решение системы уравнений (11) можно выписать, базирываясь на известном решении задачи теории упругости [4] при нагрузке (16). В случае физической нелинейности материалов оно имеет следующий рекуррентный вид ( $p_0 = 0$ ):

$$\begin{aligned} \psi^{(n)}(x) = & C_2^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) + C_3^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) - \frac{\gamma_1 C_1^{(n)}}{\beta^2} + \\ & + \frac{\gamma_1 q_0 b H_0(b-x)}{\beta^2 \pi} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \frac{\beta^2 b^2 \cos\left(\frac{\pi x}{b}\right) + \beta^2 b^2 \operatorname{ch}(\beta x - \beta b)}{\pi^2 + \beta^2 b^2} - \operatorname{ch}(\beta x - \beta b) + 1 \right] + \\ & + \frac{1}{\beta} \left[ \operatorname{sh}(\beta x) \int g_{\omega 1}^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g_{\omega 1}^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx \right], \\ u^{(n)}(x) = & \gamma_3 \psi^{(n)} + \\ & + \frac{1}{\alpha_2} \left( a_7 L_3^{-1}(q - q_{\omega}^{(n-1)}) - a_4 L_2^{-1}(p_{\omega}^{(n-1)}) + \frac{a_7 C_1^{(n)}}{2} x^2 \right) + \\ & + C_7^{(n)} x + C_8^{(n)}, \\ w^{(n)}(x) = & \frac{1}{\alpha_2} \left[ \alpha_1 \int \psi^{(n)} dx - a_7 L_3^{-1}(p_{\omega}^{(n-1)}) + \right. \\ & \left. + a_1 L_4^{-1}(q - q_{\omega}^{(n-1)}) + \frac{a_1 C_1^{(n)}}{6} x^3 \right] + \frac{C_4^{(n)}}{2} x^2 + C_5^{(n)} x + C_6^{(n)}. \tag{17} \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае операторы от внешней синусоидальной нагрузки будут

$$\begin{aligned} L_3^{-1}(q) = & \frac{q_0 b^3}{\pi^3} \left[ \cos\left(\frac{\pi x}{b}\right) + 1 \right] H_0(b-x) - \frac{q_0 b}{\pi} H_2(b-x), \\ L_4^{-1}(q) = & \frac{q_0 b^4}{\pi^4} \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right) H_0(b-x) - \frac{q_0 b^3}{\pi^3} H_1(b-x) + \\ & + \frac{q_0 b}{\pi} H_3(b-x); \end{aligned}$$

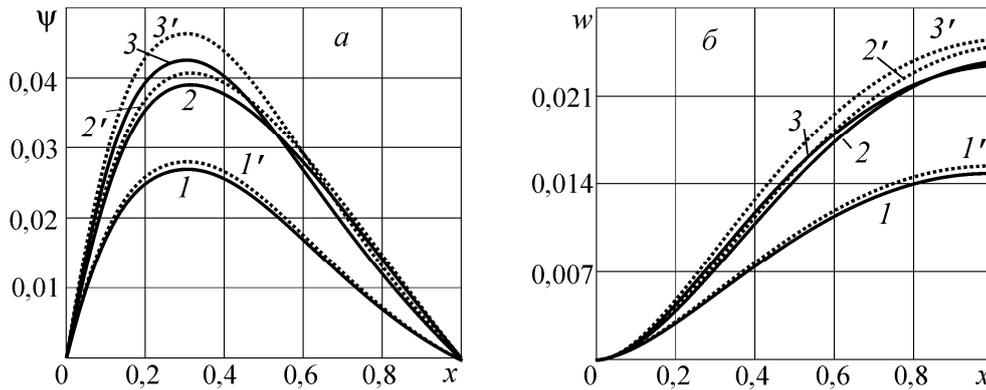


Рисунок 4 – Прогиб – а и сдвиг – б при синусоидальной нагрузке

интеграл от сдвига

$$\int \psi^{(n)} dx \Big|_{x=0} = \frac{C_2}{\beta} - \frac{\gamma_1 q_0 b^3 \operatorname{sh}(\beta b)}{\pi \beta (\pi^2 + \beta^2 b^2)} + \frac{\gamma_1 q_0 b \operatorname{sh}(\beta b)}{\pi \beta^3} - \frac{\gamma_1 q_0 b^2}{\pi \beta^2} + \frac{1}{\beta} \int \operatorname{sh}(\beta x) \int g_{\text{ол}}^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g_{\text{ол}}^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx dx \Big|_{x=0}.$$

Константы интегрирования  $C_1^{(n)}, \dots, C_8^{(n)}$  на каждом шаге приближения следуют из условий закрепления стержня. При консольной заделке левого конца стержня должны выполняться условия:

Удовлетворяя решением (17) граничные условия (16) получим:

$$\begin{aligned} C_1^{(n)} &= L_1^{-1}(q_{\omega}^{(n-1)}) \Big|_{x=l}, \\ C_2^{(n)} &= \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\operatorname{ch}(\beta l)}{\operatorname{sh}(\beta l)} \left( \int g_{\text{ол}}^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=l} - \int g_{\text{ол}}^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=0} - \int g_{\text{ол}}^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx \Big|_{x=l} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \gamma_1 C_1^{(n)} \frac{\operatorname{sh}(\beta l)}{\beta} \right) + \frac{\gamma_1 q_0 b \operatorname{ch}(\beta l)}{\pi \beta^2 (\pi^2 + \beta^2 b^2) \operatorname{sh}(\beta l)} (2\beta^2 b^2 + \pi^2 - \pi^2 \operatorname{ch}(\beta x - \beta b)) \right], \\ C_3^{(n)} &= \frac{1}{\beta} \int g_{\text{ол}}^{(n)}(x) \operatorname{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=0} + \frac{\gamma_1 q_0 b}{\pi \beta^2 (\pi^2 + \beta^2 b^2)} (\pi^2 \operatorname{ch}(\beta x - \beta b) - 2\beta^2 b^2 - \pi^2), \\ C_4^{(n)} &= -\frac{a_7}{\alpha_2} L_1^{-1}(p_{\omega}^{(n-1)}) \Big|_{x=l} + \frac{a_1}{\alpha_2} L_2^{-1}(q_{\omega}^{(n-1)}) \Big|_{x=l} - \frac{a_1}{\alpha_2} C_1^{(n)} l, \\ C_5^{(n)} &= \frac{a_7}{\alpha_2} \left[ -L_2^{-1}(p_{\omega}^{(n-1)}) \Big|_{x=0} + L_3^{-1}(q_{\omega}^{(n-1)}) \Big|_{x=0} + \frac{q_0 b^3 (\pi^2 - 4)}{2\pi^3} \right], \\ C_6^{(n)} &= -\frac{a_7}{\alpha_2} L_3^{-1}(p_{\omega}^{(n-1)}) \Big|_{x=0} + \frac{a_1}{\alpha_2} L_4^{-1}(q_{\omega}^{(n-1)}) \Big|_{x=0} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \int \psi^{(n)} dx \Big|_{x=0} + \frac{a_1 q_0 b^4 (6 - \pi^2)}{6 \alpha_2 \pi^3}, \\ C_7^{(n)} &= -\frac{1}{\alpha_2} [a_4 L_1^{-1}(p_{\omega}^{(n-1)}) \Big|_{x=l} - a_7 (L_2^{-1}(p_{\omega}^{(n-1)}) \Big|_{x=l} + a_7 C_1^{(n)} l)], \\ C_8^{(n)} &= \frac{1}{\alpha_2} \times \\ & \times \left( a_7 \left( \frac{a_7 q_0 b^3 (\pi^2 - 4)}{2\pi^3} + L_3^{-1}(q_{\omega}^{(n-1)}) \Big|_{x=0} \right) - a_4 L_2^{-1}(p_{\omega}^{(n-1)}) \Big|_{x=0} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

На первом шаге приближения ( $n = 1$ ) из соотношений (17), (18) следует решение линейной задачи теории упругости.

Численные результаты получены в рамках предыдущих предположений, синусоидальная нагрузка с амплитудой  $q_0 = 3,5$  МПа ( $p_0 = 0$ ) распределена на отрезке  $[0, b]$ .

На рис. 4, а, б показано изменение прогиба и сдвига в заполнителе вдоль оси стержня при  $b = l$  при следующих нагрузках: 1 – синусоидальная  $q_0$ , 2 – прямоугольная  $q_0$ ; распределенная на таком же отрезке; 3 – синусоидальная  $q_1 = 0,5\pi q_0$ , статически эквивалентная прямоугольной  $q_0$  (без штриха – упругий стержень, со штрихом – упругопластический).

При одинаковой амплитуде нагрузок (кривые 1, 2) перемещения от равномерно распределенной нагрузки гораздо больше по величине. Если одинаковы равнодействующие, то максимальный сдвиг несколько больше от синусоидальной нагрузки, прогибы различаются мало. Учет физической нелинейности сказывается при эквивалентных нагрузках (кривые 1', 3').

### Выводы

1. Из статически эквивалентных нагрузок локальные более опасны с точки зрения прочности. При этом большие перемещения в трехслойном стержне достигаются от выпуклых по форме нагрузок.

2. Предложенная методика позволяет исследовать

довать напряженно-деформированное состояние трехслойного упругопластического стержня при циклических локальных прямоугольных нагрузках. При этом решение новой краевой задачи строится по известному решению соответствующей задачи о нагружении из естественного состояния.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция».

### Обозначения

$q(x)$  – внешняя распределенная нагрузка;  $q_0$  – интенсивность распределенной нагрузки;  $w(x)$  – прогиб стержня;  $\psi(x)$  – относительный сдвиг в заполнителе;  $u(x)$  – продольное перемещение срединной плоскости заполнителя;  $G_k, K_k$  – модули сдвига и объемной деформации;  $h_k$  – толщины слоев;  $f^{(k)}$  – функция пластичности Ильюшина при нагружении из естественного состояния;  $f^{(3)}$  – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность заполнителя;  $\varepsilon_n^{(k)}$  – интенсивность деформаций;  $\varepsilon_y^{(k)}$  – деформационный предел текучести материала;  $\varepsilon_s^{(3)}$  – предел физической нелинейности материала заполнителя;  $s_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}$  – девиаторы напряжений и деформаций;  $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$  – шаровые тензоры напряжений и деформаций;  $\omega^{(k)}$  – функция нелинейности (пластичности).

### Литература

1. Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Головкин, К.Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К.Г. Головкин, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш. – Киев: Киевский ун-т, 2012. – 541 с.
3. Журавков, М.А. Сингулярные решения и интегральные уравнения в механике деформируемых сред / М.А. Журавков, М.Д. Мартыненко. – Минск: Изд-во БГУ, 1999. – 358 с.
4. Журавков, М.А. Математические модели сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2011. – 540 с.
5. Плещачевский, Ю.М. Динамика металлополимерных систем / Ю.М. Плещачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Минск: Бел. наука. 2004. – 386 с.
6. Старовойтов, Э.И. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании // Э.И. Старовойтов, Е.П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. – С. 45–50.
7. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – № 4. – С. 55–62.
8. Горшков, А.Г. Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2000. – № 6. – С. 91–98.
9. Старовойтов, Э.И. Повторное знакопеременное деформирование упругопластических трехслойных стержней / Э.И. Старовойтов, Д.М. Савицкий // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2013. – Т. 18, № 1. – С. 17–22.
10. Плещачевский, Ю.М. Исследование собственных частот колебаний трехслойного стержня на упругом основании / Ю.М. Плещачевский, Э.И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, С.В. Панин // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2011. – Т. 16, № 1. – С. 5–10.
11. Starovoitov, E.I. Vibration of Circular Sandwich Plates under Resonance Loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – № 12. – P. 1458–1463.
12. Горшков, А.Г. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – № 1. – С. 45–52.
13. Ильюшин, А.А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации / А.А. Ильюшин. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.

Zhuravkov M. A., Starovoitov E. I., and Leonenko D. V.

#### The deformation of the three-layer metal-polymer rod by local load.

The loading of three-layer metal-polymer rod elastoplastic beam under local rectangular and sinusoidal load is considered. For the kinematics description asymmetrical on the thickness of package accepted hypothesis's broken normal. The setting a boundary value problem and method of solving is given. The analytical decisions of elastic-plastic problem are received and their numeric analysis is conducted.

**Keywords:** three-layer metal-polymer rod beam, local load, plasticity.

Поступила в редакцию 24.03.2016.

© М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, 2016.